



KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

Année 1999 – Durée : 1 heure 15 minutes
Epreuve Etudiants

Question 1

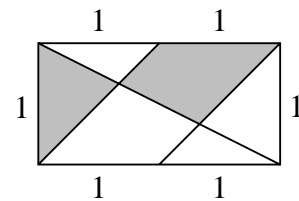
Pour écrire une carte de vœux avec son adresse, je mets 60 secondes. J'écris l'adresse en 6 secondes. Combien de fois plus de temps me faut-il pour écrire la carte sans l'adresse que pour écrire l'adresse ?

- A) 20 B) 60 C) 15 D) 9 E) 6

Question 2

Quelle est l'aire de la partie grisée du rectangle ?

- A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1



Question 3

Avec les trois consonnes K, G, R et les trois « voyelles » AN, OU, OU, on construit un mot suivant le modèle : une consonne, une voyelle, une consonne, une voyelle, une consonne, une voyelle (comme dans les mots « kangourou » ou « roukougan »). Combien y a-t-il de mots différents construits sur ce modèle ?

- A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 27

Question 4

Le chiffre des unités du nombre $1999^{1998^{1997^{\dots^{2^1}}}}$ est :

- A) 1 B) 3 C) 7 D) 9 E) un autre chiffre

Question 5

Combien d'entiers strictement positifs et strictement inférieurs à 1000 peuvent s'écrire comme produit de deux nombres pairs ?

- A) 100 B) 150 C) 200 D) 220 E) 249

Question 6

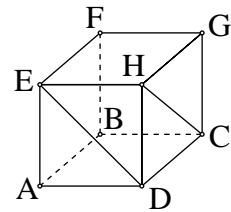
Hier le taux de change était le même dans trois bureaux de change. Aujourd'hui, dans le premier bureau, le taux a augmenté de 5 % le matin et baissé de 5 % l'après-midi ; dans le deuxième bureau, le taux a baissé de 5 % le matin et augmenté de 5 % l'après-midi ; dans le troisième bureau, le taux n'a pas varié. À la fin de la journée, dans quel(s) bureau(x) le taux est-il le plus bas ?

- A) aucun B) le premier seulement C) le premier et le deuxième
D) le deuxième seulement E) le troisième seulement

Question 7

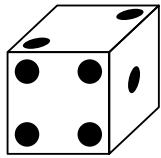
L'angle entre les diagonales (ED) et (HC) du cube ABCDHEFG vaut :

- A) 60° B) 80° C) 45°
 D) 90° E) 75°

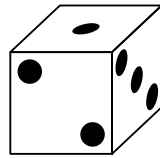


Question 8

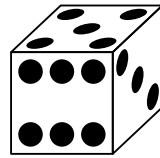
Parmi les vues en perspective d'un même dé, une vue fautive s'est glissée. Laquelle ?



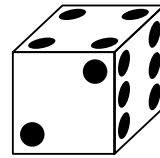
A)



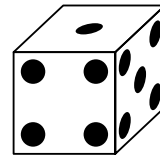
B)



C)



D)



E)

Question 9

Combien y a-t-il de nombres entiers relatifs n tels que $\frac{2n^2 + 9n + 13}{n + 2}$ soit un nombre entier strictement positif ?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Question 10

« J'ai remarqué que si j'échange les chiffres de mon âge, j'obtiens l'âge de ma fille. Quand elle est née, j'avais entre 20 et 30 ans. Quel était mon âge quand ma fille es née ? »

- A) 22 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

Question 11

La somme des longueurs des côtés d'un triangle rectangle vaut 18 cm. La somme des carrés des longueurs des côtés vaut 128 cm². L'aire du triangle, en cm², est :

- A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 9

Question 12

$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ vaut :

- A) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2$ B) $1 + \sqrt{2}$ C) $1 + 2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ E) $\sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{2}}$

Question 13

Une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est définie par :

$a_1 = 1999!$

a_{n+1} est la somme des chiffres de a_n .

Que vaut a_{1999} ?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

Question 14

En se déplaçant, à partir du K, d'une lettre vers le bas ou vers la droite, de combien de manières peut-on lire le mot KANGOUROU ?

- A) 168
B) 224
C) 128
D) 256
E) 328

KANGOUROU
ANGOUROU
NGOUROU
GOUROU
OUROU
UROU
ROU
OU
U

Question 15

Soit $a = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5 + \sqrt{6}}}}}}$.

Laquelle des inégalités suivantes est vérifiée ?

- A) $1 \leq a < 2$ B) $2 \leq a < 3$ C) $3 \leq a < 4$ D) $4 \leq a < 5$ E) $5 \leq a < 6$

Question 16

Une table ronde de rayon 1 mètre est couverte par une nappe carrée de côté 2,5 mètres, de sorte que le centre de la nappe coïncide avec le centre de la table. Quelle est la différence entre les distances au sol du point le plus haut et du point le plus bas d'un côté de la nappe ?

- A) 0,25 m B) 0,5 m C) $\frac{5\sqrt{2}-5}{4}$ m D) $(2,5\sqrt{2}-1)$ m

E) on ne peut pas la déterminer.

Question 17

Soit f la fonction donnée par $f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}}$

Quelle est la valeur de $f(1999^{2000})$?

- A) $-\frac{1}{1999^{1000}}$ B) $-\frac{1}{1999^{2000}}$ C) 0 D) $\frac{1}{1999^{2000}}$ E) $\frac{1}{1999^{1000}}$

Question 18

Les carrés des entiers strictement positifs sont écrits les uns à la suite des autres : 1491625364964... Quel chiffre trouve-t-on à la centième position ?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Question 19

Le nombre $1999^n - 1998n - 1$ est multiple de 1998×1999 si n est égal à :

- A) 1997 B) 1998 C) 1999 D) 2000 E) 2001

Question 20

La somme de deux des trois solutions de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ est nulle lorsque c est égal à :

- A) $a + b$ B) $\frac{a}{b}$ C) ab D) $a - b$ E) a^b

Question 21

La notation $[x]$ désigne la partie entière de x .

Combien de solutions réelles l'équation $x^2 + [x] = 3$ possède-t-elle ?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Question 22

Combien de solutions réelles l'équation $|||x| - 1| - 2| - 3| = 2,5$ possède-t-elle ?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) autre réponse

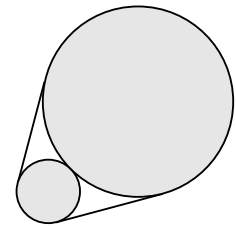
Question 23

Deux disques de diamètres 6 cm et 18 cm sont placés comme sur la figure et sont liés par une courroie qui les entoure.

Quelle est, en centimètres, la longueur de la courroie ?

- A) $10 + 20\pi$ B) $12\sqrt{3} + 14\pi$
 C) $13\sqrt{3} + 12\pi$ D) $14\sqrt{3} + 11\pi$

E) autre réponse

**Question 24**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, combien y a-t-il de carrés à côtés entiers dont les sommets sont des points à coordonnées entières comprises, au sens large, entre 0 et 8 ?

- A) 64 B) 65 C) 113 D) 114 E) 204

Question 25

Les 1999 habitants d'une île se répartissent en deux catégories : les « bons » qui disent toujours la vérité et les « truands » qui mentent toujours. Chaque habitant est soit un chanteur, soit un footballeur, soit un pêcheur.

On pose trois questions à chaque habitant :

- 1) Es-tu un chanteur ?
- 2) Es-tu un footballeur ?
- 3) Es-tu un pêcheur ?

1000 personnes répondent *oui* à la première question, 700 à la deuxième et 500 à la troisième. Combien y a-t-il de truands sur l'île ?

- A) 102 B) 180 C) 201 D) 322 E) 729

Question 26

Un point M est intérieur au carré ABCD. Les distances de M aux sommets A, B, C valent respectivement 2, 7 et 9. La distance MD vaut :

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

Question 27

Dans un championnat scolaire de handball, chaque équipe rencontre exactement une fois chacune des autres. Une victoire rapporte 2 points, un match nul 1 point et une défaite 0 point. À la fin de la compétition, l'équipe championne totalise 7 points, les deuxième et troisième places sont obtenues avec 5 et 3 points. Quel est le score de l'équipe classée dernière ?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) autre réponse

Question 28

Soit P le polynôme de degré 1999 tel que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 1999$.

Que vaut $P(2000)$?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{1999}{2000}$ D) $\frac{2000}{2001}$ E) $\frac{1999}{2001}$

Question 29

Quel nombre maximal de parties à trois éléments peut-on former à partir d'un ensemble à sept éléments de façon que deux quelconques de ces parties aient exactement un élément commun ?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Question 30

Pour tout entier naturel n , on note α_n le nombre des puissances de 2 comprises entre 1 et 2^n dont le premier chiffre dans l'écriture décimale est 1, 2 ou 3 ; on note β_n le nombre de ces puissances de 2 dont le premier chiffre est 4, 5, 6 ou 7. La suite de terme général $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$

converge vers :

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $2^{4/3}$