KANGOUROU DES MATHEMATIQUES

Année 2000 – Durée : 1 heure 15 minutes
Epreuve Etudiants

Question 1

Un conducteur démarre avec sa voiture au point A, puis effectue 10 km vers le nord, puis 10 km vers l'est, puis 6 km vers le sud, puis 2 km vers l'ouest, puis 8 km vers le nord, puis 4 km vers l'ouest et 9 km vers le sud pour finir au point B. Quelle est la distance à vol d'oiseau du point A au point B ?

A) 0 km B) 1 km C) $\sqrt{5}$ km D) 5 km E) $10\sqrt{2}$ km

Question 2

Quelqu'un ment le lundi, le mardi et le mercredi, et dit la vérité les autres jours de la semaine. Un jour il dit : « Hier je mentais ». Puis il ajoute : « Demain je mentirai ». Quel jour est-on ?

A) lundi B) mardi C) jeudi D) dimanche

E) cette situation est impossible

Question 3

Quel est le reste de la division de $3^{20} . 5^{30} - 2$ par 15 ?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 8 E) 13

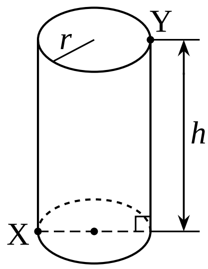
Question 4

Le père de Marie a quatre ans de plus que sa mère et la moyenne des âges de ses parents est 39 ans. La moyenne de l'âge de Marie et de celui de son père est 23 ans. Quel âge a Marie ?

A) 5 ans B) 7 ans C) 11 ans D) 13 ans E) 15 ans

Question 5

Une fourmi se déplace du point X au point Y sur la surface d'un cylindre (voir sur la figure). Si r = 1 et h = 6, quelle est la distance minimum parcourue par la fourmi ?



A) 7 B) 8 C) $2\sqrt{10}$

D) $\sqrt{\pi^2 + 36}$ E) $2\sqrt{\pi^2 + 9}$

Question 6

Sisyphe doit porter chaque jour un rocher en haut d'une montagne, mais une fois en haut le rocher roule de nouveau jusqu'en bas. Le premier jour il a fallu, pour monter le rocher au sommet et pour que celui-ci redescende, en tout 5 heures. Chacun des jours suivants, il faut deux fois plus de temps pour monter le rocher que la veille, mais le rocher redescend aussi deux fois plus vite que la veille. Si le deuxième jour, cela (montée + descente) a représenté 7 heures, combien de temps cela (montée + descente) prendra-t-il le troisième jour ?

A) 9 h B) 9 h 30 C) 12 h D) 12 h 30 E) 16 h

Question 7

Un vaisseau spatial part de la Terre vers une planète située à 2^{20} km. Après avoir parcouru un quart du trajet, il perd le contact radio avec la Terre. Lorsque le contact radio est rétabli, le vaisseau spatial se trouve alors à 2^{19} km de la Terre. Combien de kilomètres le vaisseau a-t-il parcouru sans contact radio ?

A) 2^8 km B) 2^9 km C) 2^{10} km D) 2^{18} km E) 2^{19} km

Question 8

Soit deux nombres entiers strictement positifs x et y n'ayant pas de diviseur commun autre que 1 et tels que $xy = 300$. Quelle est la plus petite valeur possible pour la somme $x + y$?

A) 30 B) 35 C) 37 D) 56 E) 79

Question 9

Soit $\overline{xyz}$ un nombre de trois chiffres avec $x > z$. Si l'on calcule $\overline{xyz} - \overline{zyx}$, le chiffre des centaines sera 4. Et alors les chiffres des dizaines et des unités seront respectivement :

A) 5 et 9 B) 9 et 5 C) c'est impossible à déterminer. D) 5 et 4 E) 4 et 5

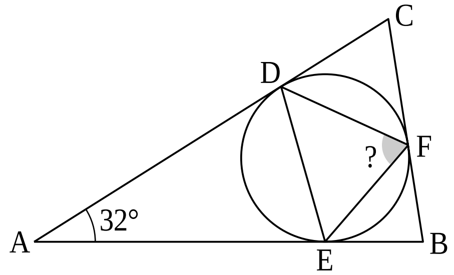
Question 10

Pour un certain entier strictement positif a, la somme
$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$
est un nombre dont tous les chiffres sont identiques ; quelle est ce chiffre ?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 9 E) il existe plusieurs valeurs possibles.

Question 11

Soit D, E et F les trois points de contact du cercle inscrit au triangle ABC (voir figure).
Si l'angle DAE mesure 32° alors combien mesure l'angle DFE ?



A) 46° B) 58° C) 64°

D) 74° E) il manque des données.

Question 12

Marc veut acheter un baladeur qui coûte 54 euros. Lorsqu'on lui demande quelles sont ses économies, Marc répond : mes économies étaient un cinquième plus élevées que ce qu'elles sont réellement, il me manquerait encore les trois quarts de la somme qui me manque.
À combien s'élèvent les économies de Marc ?

A) 6 euros B) 12 euros C) 24 euros D) 30 euros E) 32 euros

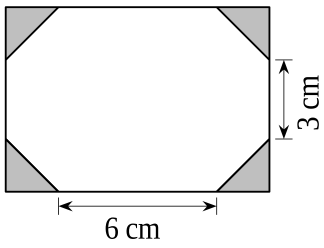
Question 13

Pour quelle valeur de n le polygone régulier à n côtés a-t-il exactement $6n$ diagonales ? (Une diagonale est un segment qui joint deux sommets non adjacents.)

A) $n = 13$ B) $n = 15$ C) $n = 17$ D) $n = 35$ E) $n = 65$

Question 14

En coupant les quatre coins d'une nappe rectangulaire par quatre triangles isocèles comme le montre la figure, on obtient une nappe octogonale d'aire 62 cm^2. Combien mesure la surface de nappe ainsi retirée ?



A) 16 cm^2 B) 12 cm^2 C) 8 cm^2

D) 6 cm^2 E) il manque une donnée.

Question 15

Si $2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^x$ alors…

A) x = 997 B) x = 779 C) x = 499 D) x = 449 E) x = 399

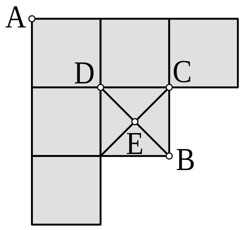
Question 16

Un nouvel antibiotique est testé. La première dose stoppe la multiplication des bactéries, ensuite chaque dose, injectée toutes les huit heures, tue chaque fois la moitié des bactéries restantes. Au début de l'expérience, un million de bactéries sont présentes dans l'échantillon. Combien de bactéries seront encore présentes 48 heures après le début de cette expérience ?

A) 5^3 B) 5^6 C) 10^3 D) $\dfrac{10^4}{3}$ E) $\dfrac{10^6}{6}$

Question 17

Sur la figure ci-contre, l'intérieur R d'un polygone est formé de 6 carrés de 1 cm^2 de surface. Étant donné un point du plan, on appelle R' le symétrique de R par rapport à ce point. Parmi les points A, B, C, D et E, lequel faut-il choisir, comme centre de symétrie, pour que la surface $R \cup R'$ mesure 8 cm^2 ?



A) A B) B C) C

D) D E) E

Question 18

De combien de manières différentes peut-on écrire le nombre 447 comme somme d'au moins deux entiers positifs impairs et consécutifs ?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Question 19

On considère les vols en avion d'un point A vers un point B, les durées de vols de A vers B et de B vers A étant identiques ; cependant, compte tenu des décalages horaires, les horaires (donnés en heures locales) sont les suivants :

• Départ de A lundi à 6 h du matin, arrivée à B mardi à 2 h de l'après-midi.
• Départ de B jeudi à 1 h de l'après-midi, arrivée à A jeudi à 3 h de l'après-midi.

Quelle heure est-il en B quand il est 4 h de l'après-midi samedi en A ?

A) 6 h de l'après-midi samedi. B) 7 h de l'après-midi samedi.

C) 6 h du matin samedi. D) 7 h du matin dimanche.

E) 7 h de l'après-midi dimanche.

Question 20

Considérons un cube de côté 2 et une sphère de centre le centre du cube et de rayon r. Appelons K l'ensemble des points de la surface du cube et G l'ensemble des points de la sphère. À quelle condition $K \cap G$ est-il un ensemble formé de six cercles ?

A) $1 < r \leq \sqrt{2}$ B) $1 \leq r < \sqrt{2}$ C) $r \leq \sqrt{2}$ D) $1 < r < \sqrt{3}$ E) $\sqrt{2} \leq r < \sqrt{3}$

Question 21

Les Martiens sont soit verts, soit rouges, soit bleus ; ils ont de 2 à 5 mains, et ils ont de 3 à 20 antennes. Combien de Martiens faut-il sélectionner, au hasard, pour être sûr que, dans le groupe ainsi constitué, on puisse trouver 11 Martiens parfaitement identiques pouvant faire une équipe de space-foot ?

A) 216 B) 217 C) 2160 D) 2161 E) 2375

Question 22

L'unique entier n qui vérifie l'équation $\left(\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)+1\right)^{1/4}=256$ se trouve dans l'ensemble…

A) {1, 2, 3} B) {4, 5, 6} C) {7, 8, 9} D) {10, 11, 12} E) {13, 14, 15}

Question 23

On se donne un carré de côté unité. Dans le plan de ce carré, combien de points sont, à la fois, à la même distance de deux sommets voisins, et à une unité d'un troisième sommet ?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 9 ou plus

Question 24

Dix enfants, dans un camp d'été, veulent jouer au volley. De combien de manières différentes peuvent-ils se diviser en deux équipes de cinq joueurs sachant que Matthieu veut jouer avec Charlotte et que Roméo ne veut pas jouer avec Juliette ?

A) 60 B) 20 C) 15 D) 30 E) 50

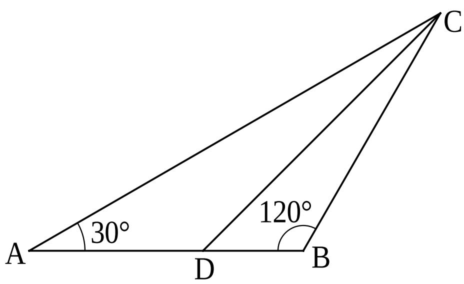
Question 25

Le plus grand diviseur d'un nombre est lui-même. Combien d'entiers ont leur second plus grand diviseur égal à 91 ?

A) une infinité B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Question 26

Dans un triangle ABC (voir figure), on a (angle BAC) = 30°, (angle ABC) = 120°, et (CD) est la bissectrice de l'angle C. Alors $\dfrac{BC}{CD}$ vaut…



A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

D $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Question 27

Jean doit multiplier deux nombres de deux chiffres. Malheureusement, il inverse l'ordre des chiffres dans l'un des deux nombres. Il obtient ainsi un résultat supérieur de 3816 au résultat correct. Quel est le résultat correct ?

A) 7632 B) 5724 C) 4823 D) 1908 E) 1007

Question 28

On note $p(n)$ le produit des chiffres de l'entier n.
Alors $p(1) + p(2) + \ldots + p(100)$ a pour valeur…

A) 2070 B) 5050 C) 1024 D) 2025 E) 2000

Question 29

Pour peser un objet sur une balance à plateaux, on pose l'objet sur l'un des plateaux et on équilibre la balance en rajoutant des poids sur l'un ou l'autre des deux plateaux. Combien de poids faut-il au minimun pour peser tous les objets de masse entière comprise entre 1 et 10 grammes ?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 10

Question 30

Quel est le nombre de plans situés à la même distance des quatre sommets d'un tétraèdre ?

A) 4 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8